18 世纪的数论

近代意义的数论研究是从费马开始的.

(1) 费马小定理:如果 p 是素数,a 与 p 互素,则 a^p-a 可以被 p 整除.

(2) 费马大定理:方程 $x^n+y^n=z^n$ 对任意大于 2 的自然数 n 无整数解.

(3) 平方数问题:每个 $4n+1$ 形的素数和它的平方都只能以一种方式表示为两个平方数之和;每个 $4n+1$ 形的素数的三次方和四次方都能以两种方式;其五次方和六次方都能以三种方式,如此等等,以至无穷.

(4) 费马数:$F_n=2^{2^n}+1, n=0,1,2,3\cdots$费马在 1640 年给梅森的一封信中断言"形如 $2^{2^n}+$

1 的数永远是素数”.

(5) 方程 $x^2-Ay^2=1$,当 A 是正数但非完全平方数时有无穷多个(整数)解.

费马还研究过完全数、亲和数等.

欧拉在 1732 年推翻了费马关于费马数的结论,接着又在 1736 年证明了费马小定理是正确的. 1753 年,欧拉在致哥德巴赫的一封信中宣布证明了 $n=3$ 时的费马大定理,欧拉的证明后来发表在他的《代数指南》一书中.

18 世纪数学家们也提出自己的猜想,其中最著名的是哥德巴赫猜想与华林问题. 哥德巴赫猜想的假设相当于说:“每个偶数是两个素数之和;每个奇数都是三个素数之和.”这就是著名的哥德巴赫猜想.(注:哥德巴赫猜想略经修改的较为严格的现代表述为:每个不小于 9 的奇数可以表示成三个奇素数之和;每个不小于 6 的偶数可以表示为两个奇素数之和)而华林则提出了这样一个猜想:“任一自然数 n 可以表示成至多 r 个数的 k 次幂之和,即 $n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_r^k$,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 为自然数,r 依赖于 k.”